

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

آمار و احتمال (رشته ریاضی و فیزیک)



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

سید محمد سید شاکری
۱۳۹۴/۰۵/۰۱

گروه ریاضی

حسابان و ریاضی پایه

مسئول درس: علیرضا فاطمی
دستیار: مهدی پوررضایی

حسین شفیع زاده • علیرضا فاطمی • سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمد رضا صیدآبادی
دستیار: هادی کاظم نژاد

سید محسن میراسلامی • امیدرضا پورحسینی • هادی کاظم نژاد
سعید اکبرزاده

ریاضیات گسسته

مسئول درس: حسین اسدزاده

سعید اکبرزاده • سوگند روشنی • پرمیدا هادی پور

ریاضی تجربی

مسئول درس: امیرحسین شریفیان
دستیار: امین کبیری

ایمان اردستانی • محمد خان گلدی

ریاضی انسانی

مسئول درس: عباس سعیدی
دستیار: امیرحسین حریری

امیدرضا پورحسینی • محمد منتظران • حسین خواجه وند
حسین افسری • مجید یوسف زاده

زیست شناسی

مسئول درس: علی جوهری

امیر کبیری راد • منصوره رئیس دانا • بتول خواجه پور

فیزیک

مسئول درس: مهدی نیکوگفتار

احمد رضوانی • مهرناز طلوع شمس • مریم حیدری
یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

شهرام شاه پرویزی • محمد وحیدی • سبحان دقیق
محمد علی توسلی فر

زمین شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

فرزانه رجایی • حسن علی محمدی

انسان و محیط زیست

مسئول درس: شکبیا کریمی

محبوبه کاظمی

سلامت و بهداشت

مسئول درس: علیرضا رضایی نیا

علیرضا رضایی نیا

سید محمد حسین کشانی
۱۳۹۴/۰۵/۰۱

طراحان



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

طراحان

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷گروه
عمومیادبیات
فارسیمسئولین درس:
عماد فیض آبادی
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و
زندگیمسئولین درس:
علی اکبر آخوندی
زهره محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی
زهره محمدی • محبوبه ابتهسامزبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پژنگ
مهرآوه مجتهدجامعه
شناسیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان
عربیمسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی
الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

رضا کیانپور

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷



-۱

پ) نادرست

ب) نادرست

الف) درست

-۲

ب) $B \subseteq A$, $A \subseteq B$

الف) لازم

ت) گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد.

پ) $2^n - 1$

-۳

ت) $3 \leftarrow$

پ) $4 \leftarrow$

ب) $1 \leftarrow$

الف) $2 \leftarrow$

-۴

نکته ۱: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به صورت « $p \vee q$ » می نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم. در اینجا به رابط منطقی « $\vee$ » فاصل گفته می شود. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره « $p \vee q$ » فقط وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \vee q$ درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته ۲: گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که گزاره های p و q هم ارزش باشند. یعنی هر دو «درست» یا هر دو «نادرست» باشند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

طبق نکات، داریم:

p	q	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د

-۵

الف) نادرست

$$\underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} \in Q \right)}_T \vee \underbrace{(A \cap A' = \emptyset)}_T \right]}_T \Rightarrow \underbrace{(873^3 + 1) \in P}_F \equiv F$$

ب) نادرست

$$\underbrace{(2 \notin \{3, \{2\}\})}_T \Leftrightarrow \underbrace{(\forall x \in R ; x^2 - 2x > -1)}_F \equiv F$$



۶-

نکته: نقیض گزاره های سوری به صورت زیر است:

$$\sim (\forall x ; P(x)) \equiv \exists x ; \sim P(x) , \quad \sim (\exists x ; P(x)) \equiv \forall x ; \sim P(x)$$

نکته: برای دو گزاره p و q داریم:

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases} \therefore \text{قوانین دمورگان}$$

$$\text{نکته} : \sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

طبق نکات، داریم:

الف) تفاضل دو عدد برابر ۷ نیست یا مجموع آن دو عدد برابر ۱۲ نیست.

ب) عدد طبیعی مانند n وجود دارد که n مضرب ۳ باشد و n^2 مضرب ۹ نباشد.

۷-

نکته: جدول ارزش ترکیب عطفی و شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

با استفاده از نکته داریم:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

۸-

نکته: هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است: $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow \sim p$

مسئله را به کمک عکس نقیض آن ثابت می کنیم؛ بنابراین فرض می کنیم $n \neq 3k$ ، داریم:

$$n \neq 3k \Rightarrow n^2 \neq 9k^2 = 3(3k^2) \Rightarrow n^2 \neq 3k' \quad k' \in \mathbb{R}$$

۹-

نکته: برای دو گزاره p و q داریم:

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases} \therefore \text{قوانین دمورگان}$$

نکته: نقیض گزاره های سوری به صورت زیر است:

$$\sim (\forall x ; P(x)) \equiv \exists x ; \sim P(x) , \quad \sim (\exists x ; P(x)) \equiv \forall x ; \sim P(x)$$

براساس نکات بالا، داریم:

$$(\exists x \in \mathbb{R} - \{0\} ; x + \frac{1}{x} \geq 2) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} ; (2^n + 1) \notin P)$$



-۱۰

نکته: فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

فرض می‌کنیم مجموعه مورد نظر n عضو دارد، طبق نکته و فرض سؤال داریم:

$$2^{n+4} - 2^n = 120 \Rightarrow 2^n \times 16 - 2^n = 120 \Rightarrow 2^n (16 - 1) = 120 \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

-۱۱

نکته: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیر مجموعه B نامیده و می‌نویسند $A \subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

طبق نکته، داریم:

فرض	$A \subseteq B$
حکم	$B' \subseteq A'$

$$\forall x \in B' \xrightarrow{\text{تعریف متمم}} x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \xrightarrow{\text{تعریف متمم}} x \in A' \quad \text{حکم اثبات شد.}$$

-۱۲

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

طبق نکته، اعضای مجموعه‌های A و B باید یکسان باشد، پس:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 4y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} &\xrightarrow{\text{حل معادله}} \begin{cases} x + 4y = 5 \\ 4x - 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \\ &\xrightarrow{\text{جای گذاری در } x + 4y = 5} \frac{1}{5} + 4y = 5 \Rightarrow 4y = 5 - \frac{1}{5} \Rightarrow 4y = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

-۱۳

نکته: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن‌گاه: $A \cap C \subseteq B \cap D$

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

$$\begin{cases} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(X \cap X) \subseteq (A \cap A')}_{\text{اشتراک دو طرف}} \Rightarrow X \subseteq \emptyset$$

اکنون با توجه به تعریف دو مجموعه مساوی داریم:

$$\left. \begin{aligned} X &\subseteq \emptyset \\ \emptyset &\subseteq X \text{ می‌دانیم} \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = \emptyset$$



نکته: برای دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

نکته (خاصیت توزیع پذیری):

الف) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه های مرجع و تهی، تساوی های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

با استفاده از نکات، عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} (A \cup B) - B &= (A \cup B) \cap B' \quad \text{تبدیل تفاضل به اشتراک} \\ &= (A \cap B') \cup (B \cap B') \quad \text{توزیع پذیری} \\ &= (A \cap B') \cup \emptyset \\ &= A \cap B' \quad \text{طبق خواص } \emptyset \\ &= A - B \quad \text{تبدیل اشتراک به تفاضل} \end{aligned}$$

نکته (قوانین جذب یا همپوشانی): اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U باشند، داریم:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

نکته (خاصیت شرکت پذیری):

الف) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه های مرجع و تهی، تساوی های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

با استفاده از نکات، سمت چپ عبارت را ساده می کنیم:

قانون جذب $A \cap (A \cup B) = A$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (A - B) = A \cap B' \\ (B - A) = B \cap A' \end{cases} &\Rightarrow (A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A') \\ &= [(A \cap B') \cap B] \cap A' \quad \text{شرکت پذیری} \\ &= [A \cap (B' \cap B)] \cap A' \quad \text{شرکت پذیری} \\ &= (A \cap \emptyset) \cap A' \quad \text{تعریف متمم} \\ &= \emptyset \cap A' = \emptyset \end{aligned}$$

بنابراین حاصل عبارت سمت چپ برابر است با: $\emptyset \cup A = A$